MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

CLASA A 11 A

Soluții și barem de corectare

1. a) calcul direct (3p)

b) din a) rezultă că $\det(\alpha A+I_n)\neq 0$ deci $\alpha A+I_n$ este inversabilă și obținem

$\alpha B+I_n=(\alpha A+I_n)^{-1}$ (2p)

De aici deducem că $(\alpha B+I_n)(\alpha A+I_n)=I_n,$ de unde $\alpha BA+B+A=0_n,$ de unde $AB=BA$ (2p)

2. a) $a_n=\frac{1}{n}$ (1p)

$(b_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător și mărginit superior, deci convergent (2p)

b) $a_n=\sqrt[n-1]{n!}$ (2p)

finalizare (2p)

3. Fie $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ cu $a_{ii}=b$ dacă $i\in\{2,...,n\}$ și $a_{ij}=a$ altfel. Atunci $\det(A)=a(b-a)^{n-1}\geq 0$ (2p)

Dacă A' este matricea obținută prin interschimbarea a două linii ale lui $A,$ atunci $A'\in M_n(a,b)$ și deci $\det(A')=-\det(A)\geq 0$. Așadar $a(b-a)^{n-1}=0$ (2p)

În mod analog (prin interschimbarea lui a cu b) se obține că $b(a-b)^{n-1}=0$ (2p)

Din aceste relații rezultă că $a=b$ (1p)

4. a) cum $x_{2n}\leq 2-\frac{1}{x_n},n\geq 1,$ este suficient să arătăm că $2-\frac{1}{x_n}\leq x_n\Leftrightarrow(x_n-1)^2\geq 0,n\geq 1$ (2p)

b) Să presupunem că există $n_0\in\mathbb{N}^*$ cu $x_{n_0}<1.$ Definind șirul $y_n=x_{2^n\cdot n_0},n\in\mathbb{N},$ se obține că

$y_{n+1}+\frac{1}{y_n}\leq 2,n\in\mathbb{N}.$ Din a) rezultă că $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător și cum $y_n>0,n\in\mathbb{N}$ se obține că

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent și fie l limita acestuia. Trecând la limită în relația

$y_{n+1}\cdot y_n+1\leq 2y_n,n\in\mathbb{N},$ deducem că $l=1,$ contradicție (3p)

c) Nu în mod necesar. De exemplu $x_n=2-(-1)^n,n\geq 1,$ verifică cerința fără a fi convergent (2p)